PROGETTTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede – Gara Triennio

18 novembre 2009

1) Die Arbeit besteht aus 25 Fragen. Für jede Frage stehen 5 Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A, B, C, D, E gekennzeichnet.
2) Nur eine der Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.
3) Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind nicht erlaubt. Die BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET!
4) Für die gesamte Arbeit stehen dir 2 Stunden zur Verfügung. Gute Arbeit und viel Vergnügen!

Vorname:________________ Nachname:___________________ Klasse:_______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Welche dieser Zahlen ist in Teiler von $3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3$?
(A) 42 (B) 45 (C) 52 (D) 85 (E) 105

2) Das Vorderrad von Claras Fahrrad hat einen Radius von 28cm, während das Hinterrad einen Radius von nur 16cm hat. Am Ende eines Ausflugs hat sich das Vorderrad 10000 mal gedreht, wie oft drehte sich das Hinterrad?
(A) 12000 (B) 14500 (C) 17500 (D) 19000 (E) 21000

3) Auf dem Planeten Venus, im 33. Jahr des Venuskalenders, treffen sich Eva und Greta im Park. Eva stellt fest:“ Ich habe nur 153 Kinder, doch am Ende dieses Jahres wird die Summe ihres Alter um 100 größer sein, als die Summe des Alters deiner Kinder, obwohl es 180 sind!“ In welchem venusianischem Jahr wird die Summe des Alters der Kinder von Greta jene von Eva übertreffen?
(A) 37 (B) 38 (C) 39 (D) 40 (E) 41

4) Ein Floh befindet sich auf der Nummer 12 eines Uhrenblatts. Er wählt eine natürliche Zahl zwischen 1 und 12 (beide eingeschlossen) und beginnt im Uhrzeigersinn jeweils n Nummern zu überspringen. (ist zum Beispiel n = 3, so befindet er sich nach dem ersten Sprung auf 3, nach dem zweiten auf 6…) Nach 12 Sprüngen befindet er sich das erste Mal wieder auf der 12. In wie vielen verschiedenen Arten konnte der Floh n wählen?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 12

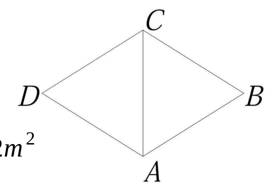
5) Ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Sechseck sind im selben Kreis eingeschrieben. In welchem Verhältnis stehen die Dreiecksfläche mit der des Sechsecks?
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{1}{6}$

6) Am Ende des letzten Schuljahres haben 18% die Schule erfolgreich abgeschlossen und 3% sind auf eine andere Schule gewechselt. Für dieses Schuljahr haben sich 84 neue Schüler eingeschrieben und so ist auch dieses Jahr die Schüleranzahl unverändert. Wie viele Schüler sind an dieser Schule?
(A) 324 (B) 400 (C) 500 (D) 525 (E) 600

7) Wie viele perfekte Quadrate teilen 1600? (perfekte Quadrate sind Zahlen vom Typ n^2 , n natürliche Zahl; so sind zum Beispiel 1,4,9,16.. perfekte Quadrate)
(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 10 (E) 12

8) Die kleine Rita hat sich folgendes Spiel ausgedacht: für jede zweiziffrige Zahl, subtrahiert sie die Einerziffer von der Zehnerziffer und notiert das Ergebnis auf ein Blatt (für 21 schreibt sie 1, aus 2 – 1, für 37 hingegen -4 aus 3-7). Am Ende summiert sie alle Ergebnisse, welches Ergebnis wird sie erhalten?
(A) 0 (B) -30 (C) 45 (D) -50 (E) 100

9) In der abgebildeten Raute sind die Dreiecke ABC und ACD gleichschenklig mit Seitenlänge 1m. Dreht man den Rhombus um 60° um den Punkt A, so überdeckt er diese Figur teilweise. Wie groß ist die überdeckte Fläche?
(A) $\frac{\pi}{2}m^2$ (B) $1m^2$ (C) $\pi\, m^2$ (D) $\frac{\pi}{3}m^2$ (E) $2m^2$



10) In einer Klasse fand eine Mathematik Schularbeit statt, ihr Ergebnis war Durchschnitt 7. Der Notendurchschnitt der Buben der Klasse war 6,5, während der Durchschnitt der Mädchen 8 war. Wenn in der Klasse 10 Buben sind, wie viele Mädchen sind in der Klasse?
(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

11) Auf der versteckten Seite des Mondes leben Schurken, die immer Lügen, Ritter, die immer die Wahrheit sagen und Pagen, die , wenn sie zwei Sätze sagen, immer in einem Satz lügen und im anderen die Wahrheit sprechen und das nicht immer in dieser Reihenfolge. An diesem seltsamen Ort werden zufällig drei Bewohner mit den wohlklingendem Namen Drago, Ludovico und Orlando ausgewählt. Diese stellen folgendes fest: Drago:“Ich bin ein Page, Ludovico ist ein Ritter“. Ludovico:“Orlando ist ein Page, ich bin ein Schurke“. Orlando:“Ich bin ein Page, wir alle sind Pagen“. Wie viele sind tatsächlich Pagen von den Dreien?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Man kann es nicht feststellen

12) Eine Goldmünze ist von vier gleichen Silbermünzen umgeben. Jede Silbermünze ist Tangente zur Goldmünze und zu je zwei anderen Silbermünzen. In welchem Verhältnis steht der Radius der Goldmünze zu dem Radius der Silbermünzen?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) 1

13) Die Zahlen *a* und *b* sind größer gleich Null. Wir wissen dass $a^3+a<b-b^3$ ist. Welche Reihenfolge der Zahlen a, b, 1 ist korrekt?

(A) $b<a<1$ (B) $a=b=1$ (C) $a<1<b$ (D) $a<b<1$ (E) $1<a<b$

14) Clara hat das Passwort ihres nagelneuen Computers vergessen! Sie erinnert sich aber daran, dass es eine Sequenz von vier Vokalen ist, die aber nicht unbedingt unterschiedlich sind. Zwei dies Vokale sind Großbuchstaben, zwei klein. Wie viele verschiedene Passwörter muss Clara schlimmstenfalls versuchen?

(A) $3\cdot5^4$ (B) 5^5 (C) $6\cdot5^4$ (D) 5^6 (E) $3\cdot5^6$

15) Auf meiner Tafel stehen einige ganze positive Zahlen, nicht unbedingt sind alle verschieden. Addiere ich sie, so erhalte ich 83, multipliziere ich sie, so erhalte ich 1024. Welches ist die kleinste Zahl, die auf meiner Tafel steht?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

16) Welche Zahl erhält man, wenn man all jene Zahlen addiert, die aus den Ziffern 1,2,3 und 6 gebildet werden können und jede der angeführten Ziffern nur einmal vorkommen darf?

(A) 79992 (B) 13332 (C) 123456 (D) 100000 (E) 63210

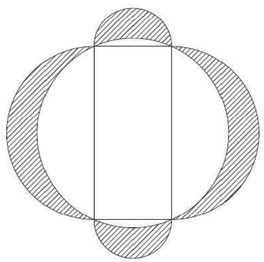
17) David und Goliath wohnen in einem Palast, dessen Grundriss ein regelmäßiges Fünfeck ist. Der Haupteingang des Schlosses befindet sich in einem der Eckpunkte und der Palast steht inmitten einer Ebene. Goliath stiehlt die Schleuder Davids, verlässt den Palast durch den Haupteingang und legt nicht mehr als 20m zurück, bevor ihm die Schleuder auf den Boden fällt. Wie viele Quadratmeter muss David höchsten absuchen, bevor er seine Schleuder wiederfindet?

(A) $320\pi\, m^2$ (B) $160\pi\, m^2$ (C) $100\left(4\pi-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)m^2$ (D) $100\left(2\pi+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)m^2$ (E) $280\pi\, m^2$

18) Wie groß ist die zweite Ziffer von links der Zahl $(10^4+1)(10^2+1)(10\ +1)$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

19) Wir zeichnen ein Rechteck mit den Seitenlängen 5cm und 12 cm, seinen Umkreis und die Halbkreise über seinen Seiten, so wie in der neben angeführten Figur. Wie groß ist die schraffierte Fläche?



(A) $45cm^2$ (B) $13\pi\, cm^2$ (C) $19\pi\, cm^2$

(D) $60cm^2$ (E) $20\pi\, cm^2$

20) Welche Einerziffer hat die Zahl $\frac{66^{66}}{2}$?

(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) 9

21) Für wie viele natürliche Zahlen *n* ist sowohl *n* selbst als auch die Zahl $(n-6)^2-1$ eine Primzahl?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 7 (E) Mehr als 8

22) Gabriel hat zehn Würfel in drei verschiedenen Größen, einige haben eine Kantenlänge von 3cm, einige von 4cm und einige von 5cm. (er hat von jeder Art mindestens einen). Die Summen aller Würfelvolumen ist $577m^3$; wie viele Würfel der Kantenlänge 3 hat er?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

23) Vier Freunde Anna, Bea, Carlo und Dino spielen Poker mit 20 Karten. Sie verwenden: 4 Könige, 4 Königinnen, 4 Buben, 4 Asse und 4 Zehner. Es werden 5 Karten pro Speiler verteilt. Anna sagt: Ich habe einen Poker! (Vier Karten mit den dem selben Wert). Bea sagt: ich habe fünf Herzen! Carlo sagt: ich habe fünf rote Karten! Und schließlich sagt Dino: ich habe drei Karten mit dem selben Wert und die anderen beiden ebenso! Wir wissen, dass eine dieser Aussagen falsch ist. Welche?

(A) Anna (B) Bea (C) Carlo (D) Dino (E) Man kann es nicht sagen

24) Eine Ameise befindet sich auf der Ecke eines Würfels. Sie bewegt sich entlang der Kanten und kommt zu jeder Ecke genau ein Mal. Wie viele verschiedene Wege kann sie durchlaufen?

(A) 10 (B) 18 (C) 22 (D) 26 (E) 30

25) Ein Würfel mit Kantenlänge 1m und eine Kugel haben den selben Mittelpunkt und die Kugeloberfläche durchläuft die Würfelskanten genau im Mittelpunkt jeder Seite. Wie groß ist jener Teil der Würfeloberfläche, die außerhalb der Kugeloberfläche liegt?

(A) $\left(6-\frac{3\pi}{2}\right)m^2$ (B) $(8-2\pi)\,m^2$ (C) $\left(6-\frac{4\pi}{3}\right)m^2$ (D) $(12-3\pi)\,m^2$ (E) $\pi\, m^2$